Алгебра логики

Алгебра логики – формальная логическая теория, раздел математической логики, разработанный в XIX веке английским математиком Джорджем Булем. В алгебре логики используются **алгебраические методы** для решения логических задач. Алгебра логики предоставляет математический аппарат, с помощью которого формализуют (записывают), упрощают, вычисляют и преобразовывают логические высказывания.

Объектами алгебры логики являются **высказывания**.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно. При этом отвлекаются от смыслового содержания высказывания и рассматривают лишь его значение.

Возможные значения для логических высказываний и логических констант:

ИСТИНА: True или 1

ЛОЖЬ: False или 0

Примеры

Являются высказываниями:

- «Сегодня теплое утро»
- «√5 – иррациональное число»

Не являются высказываниями:

- «Пойдет ли сегодня дождь?» - вопросительное предложение, которое не имеет значения ИСТИНА или ЛОЖЬ.
- «Ученик 10 класса» - невозможно определить значение высказывания – истинно оно или ложно
- Это предложение ложно – противоречивое утверждение

Обозначения

Для обращения к высказываниям их обозначают большими латинским (A, B, C, …) буквами, маленькими латинскими буквами аналогично переменным: x, y, z, … ,или индексами: x1, x2, … .

Над простыми высказываниями в алгебре логики определяют логические операции, в результате действия которых получаются новые составные высказывания.

Основные логические операции

Существует три основные операции:

Логическое отрицание (инверсия)

Обозначение: Ā, ¬A, not A, не A.

Высказывание Ā истинно при ложном A и Ā ложно при истинном A.

Таблица истинности:

A	Ā
1	0
0	1

Логическое сложение (дизъюнкция)

Обозначение: A v B, A or B, A + B, A или B.

Высказывание A v B ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Таблица истинности:

A	B	F = A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическое умножение (конъюнкция)

Обозначение: A&B, A and B, A*B, A^B, AB, A и B.

Высказывание A ^ B истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Таблица истинности:

A	B	F = A ^ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Остальные операции алгебры логики выражаются через 3 основные операции. Они были введены для сокращения и упрощения записи логических выражений:

Логическое следование (импликация)

Обозначение: A → B, A ⇒B.

Высказывание A → B ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B – ложно.

Замечание: в операции импликации посылка A не обязана быть истинной, в отличие от логического оператора в языках программирования «если A, то B».

A → B = Ā v B.

Таблица истинности:

A	B	F = A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (равносильность)

Обозначение: A ~ B, A ⇔ B, A ≡ B.

Высказывание A ⇔ B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

A ⇔ B = (¬A v B) ^ (¬B v A).

Таблица истинности:

A	B	F = A ⇔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Исключающее ИЛИ (сложение по модулю два)

Обозначение: A XOR B.

Высказывание A XOR B истинно, когда A и B не равны.

Таблица истинности:

A	B	F = A ⇔ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Порядок выполнения и приоритеты операций

Порядок выполнения задается круглыми скобками. При отсутствии скобок порядок выполнения операций следующий:

1. Инверсия
2. Конъюнкция
3. Дизъюнкция
4. Исключающее ИЛИ
5. Импликация
6. Эквивалентность

Формула алгебры логики (или составное высказывание) состоит из нескольких высказываний, соединенных логическими операциями. Исходные высказывания могут быть логическими переменными или логическими константами (имеющими постоянное значение ИСТИНА или ЛОЖЬ).

Логическая функция определяется на множестве логических переменных и логических констант, принимающих значение ИСТИНА или ЛОЖЬ. Значение функции вычисляется в результате выполнения логических операций с (или над) логическими операндами.

Например:

F(A, B, C) = A ^ (¬B v C);

F(x1, x2, x3) = ¬x1 v x2 ^ ¬x3.

Логическую функцию можно задать двумя способами: логической формулой или **таблицей истинности**. Таблица истинности задает значения функции при всех возможных наборах ее переменных.

Законы алгебры логики

Закон	Для ИЛИ	Для И
Коммутативный (переместительный): логические переменные можно менять местами	X v Y = Y v X	X ^ Y = Y ^ X
Ассоциативный (сочетательный): логические переменные в дизъюнкциях и конъюнкциях можно объединять в группы	(X v Y) v Z = X v (Y v Z)	(X ^ Y) ^ Z = X ^ (Y ^ Z)
Дистрибутивный (распределительный): одинаковые переменные в дизъюнкциях и конъюнкциях можно выносить за скобки	(X v Y) ^ Z = = (X ^ Z) v (Y ^ Z)	(X ^ Y) v Z = = (X v Z) ^ (Y v Z)
Закон непротиворечия: высказывание может быть только истинным или только ложным, третьего не дано		X ^ ¬X = 0

Закон исключенного третьего: из двух противоречащих высказываний одно является истинным	X v ¬X = 1	
Правила де Моргана	¬(X v Y) = ¬X ^ ¬Y	¬(X ^ Y) = ¬X v ¬Y
Законы склеивания	(X ^ Y) v (X ^ ¬Y) = X	(X v Y) ^ (X v ¬Y) = X
Законы исключения констант	X v 0 = X, X v 1 = 1	X ^ 0 = 0, X ^ 1 =X
Закон снятия двойного отрицания	¬¬X = X	
Закон идемпотентности	X v X = X	X ^ X = X
Закон полглощения	X v (X ^ Y) = X	X ^ (X v Y) = X
Закон контрапозиции	X → Y = ¬X → ¬Y	
Снятие импликации	X → Y = ¬X v Y	
Снятие эквивалентности	X ⇔ Y = (X ^ Y) v (¬X ^ ¬Y)	

Преобразование логических выражений

Под преобразованием логических выражений или упрощением логических формул понимают изменение исходного логического выражения в соответствии с законами алгебры логики, приводящее к логическому выражению, в котором меньше операций конъюнкции и дизъюнкции и нет отрицаний неэлементарных выражений. Также выражение считается упрощенным, если получившееся выражение содержит меньше логических переменных.

Пример:

(x v y) ^ (¬x v y) ^ (¬x v ¬y) =

{по закону идемпотентности добавим еще один множитель}

= (x v y) ^ (¬x v y) ^ (¬x v y) ^ (¬x v ¬y) =

{по закону склеивания для двух первых и двух последних множителей}

= y ^ ¬x.

Построение таблиц истинности для логических выражений

Таблица истинности логического выражения (функции) выражает соответствия между всеми возможными наборами значений логических переменных и значением выражения.

Для функции от 2 переменных существует 2^2 = 4 комбинации наборов значений переменных. Для функции трех переменных – 2^3 = 8, для функции четырех перменных – 2^4 = 16 и т.д. В общем случае для функции от N переменных число строк M в таблице истинности вычисляется по формуле: $M = 2^N$.

Алгоритм построения таблиц истинности:

1. Определить количество N переменных.
2. Вычислить количество всевозможных наборов значений $M = 2^N$, равное количеству строк в таблице истинности.

3. Подсчитать количество логических операций в выражении и определить количество столбцов в таблице, которое равно количество переменных + количество операций.
4. Озаглавить столбцы названиями переменных и названиями логических операций
5. Заполнить столбцы логических переменных наборами значений. (Например от 000 до 111 с шагом 001 в случае для 3 переменных).
6. Заполнить таблицу истинности по столбцам значений промежуточных операций слева направо
7. Заполнить окончательный столбец значений для функции F.

Пример:

F(x, y) = ¬x ^ y v ¬(x v y) v x

Переменные		**Промежуточные логические формулы**					**F(x, y)**
x	y	¬x	¬x ^ y	x v y	¬(x v y)	¬x ^ y v ¬(x v y)	¬x ^ y v ¬(x v y) v x
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Построение логической функции по таблице истинности

Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая конъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Функция представлена в дизъюнктивной нормальной форме, если она представлена только в виде трех основных логических операций (отрицания, конъюнкции и дизъюнкции) и не содержит отрицаний неэлементарных формул.

Пример: F(x,y,z) = (x ^ y) v (y ^ ¬z)

Любое логическое выражение можно привести к ДНФ.

Совершенная ДНФ (СДНФ) – ДНФ, в которой все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, при этом каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием).

Иными словами, совершенная ДНФ – это ДНФ, удовлетворяющая двум условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций
- каждая простая конъюнкция полная

Пример: F(x,y,z) = (x ^ ¬y ^ z) v (x ^ y ^ ¬z)

Если известна таблица истинности некоторой функции, то для построения формулы логической функции необходимо построить дизъюнкцию всех полных элементарных конъюнкций на всех наборах переменных, принимающих значение 1.

Алгоритм построения логической функции

Рассмотрим пример:

Пусть задана полная таблица истинности некоторой функции

x	**y**	**z**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Выделим из исходной таблицы только те наборы переменных, на которых функция принимает значения 1:

x	**y**	**z**	**F**
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

2. Для каждой строки, где значение функции равно 1, составим конъюнкцию их всех переменных. Если переменная в строке равна 0, то она входит в конъюнкцию со знаком отрицания:

x	**y**	**z**	**F**	
0	1	0	1	¬x ^ y ^ ¬z
1	0	0	1	x ^ ¬y ^ ¬z
1	0	1	1	x ^ ¬y ^ z
1	1	1	1	x ^ y ^ z

3. Выражения, полученные в каждой строке, объединяются операцией дизъюнкции:

F(x, y, z) = (¬x ^ y ^ ¬z) v (x ^ ¬y ^ ¬z) v (x ^ ¬y ^ z) v (x ^ y ^ z)

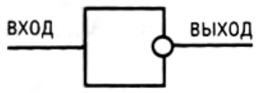
В результате мы получили ДНФ – логическое выражение, соответствующее исходной таблице истинности.

При необходимости полученное выражение можно упростить.

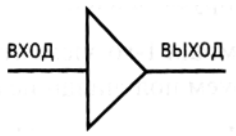
Построение логических схем

В цифровой технике существуют специальные логические схемы, реализующие базовые логические операции.

Инвертор



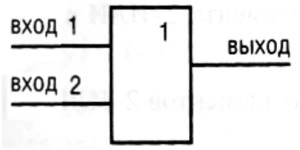
или



2-ИЛИ

Реализует логическую операцию сложения (дизъюнкцию)

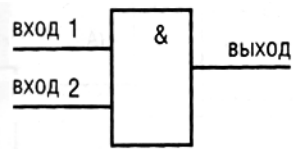
Цифра 2 обозначает количество входов (вообще говоря, их может быть более двух).



2-И

Реализует логическую операцию умножения (конъюнкцию)

Цифра 2 обозначает количество входов (вообще говоря, их может быть более двух).



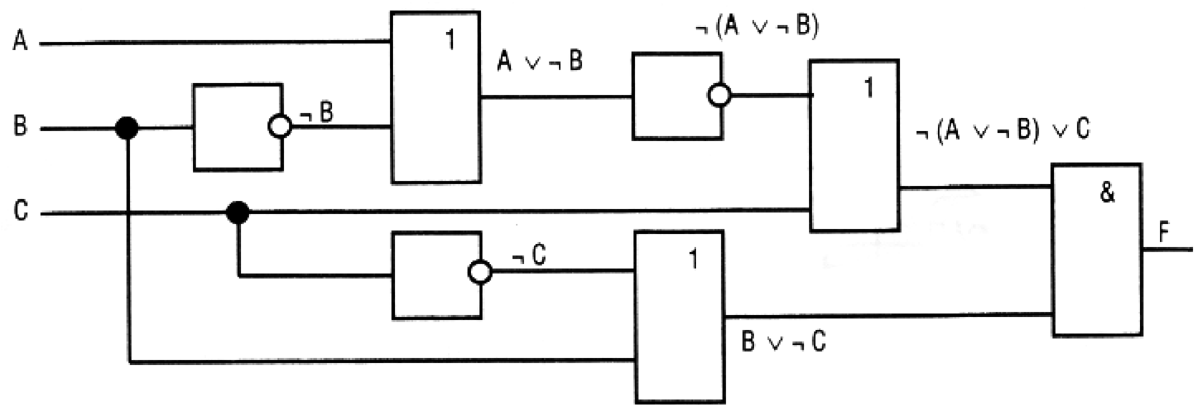
Пример:

Построить логическую схему для функции F = (¬(A v ¬B) v C) ^ (B v ¬C)

Решение. В соответствии с приоритетами выполнения логических операций логическую схему строим в следующем порядке:

1. инвертируем значения параметров B и C;
2. при помощи 1 элемента 2-ИЛИ складываем A и ¬B. Далее инвертируем получившийся на выходе сигнал;
3. выход 1го элемента 2-ИЛИ после инверсии соединяем со входом 2го элемента 2-ИЛИ. На другой вход этого элемента подаем сигнал C;
4. отдельно при помощи 3го элемента 2-ИЛИ складываем B и ¬C;
5. соединяем выходы второго и третьего элементов 2-ИЛИ со входами элемента 2-И.

Логическая схема будет иметь вид:



Обратите внимание, что на вход логической схемы подаются все сигналы (A, B, C), участвующие в логической функции, в не инвертированном виде. Количество входов логической схема равно количеству переменных, участвующих в логической функции, а выход всегда один.