Решение логических задач

Рассмотрим 3 типа логических задач, для каждого из которых будет приведено несколько способов решений.

Задачи 1го типа

В условии приводятся несколько двойных или одинарных утверждений и дается оценка их истинности, т.е. сообщается, сколько участников говорят только правду, сколько лгут и сколько говорят то правду, то ложь.

Пример: Петя, Вася и Маша остались дома одни. Кто-то из них съел варенье. На вопрос мамы, кто это сделал, они сказали:

А. Петя: «Я не ел. Маша тоже не ела.»

В. Вася: «Маша действительно не ела. Это сделал Петя.»

С. Маша: «Вася врет. Это он съел.»

Кто из них ел варенье, если известно, что двое оба раза сказали правду, а третий один раз соврал, и один раз сказал правду.

Решение. Выделим из условия простые высказывания:

Петя ¬П ¬М

Вася ¬М П

Маша В Вася врет

Построим таблицу, в которой совместим высказывания и всевозможные варианты, когда двое говорят правду, а один то истину, то ложь:

Условие задачи		1	2	3
Петя	¬П ¬М	Л	И	И
Вася	¬М П	И	Л	И
Маша	В Вася врет	И	И	Л

Проанализируем таблицу:

1. Первая колонка противоречит условию, т.к. Маша утверждает, что Вася врет.
2. Третья колонка также противоречит, т.к. Петя говорит что не виноват, а Вася, что Петя виноват.
3. Из второй колонки следует, что Маша сказала правду, и виноват Вася, который сказал правду про Машу и неправду про Петю.

Ответ: Варенье съел Вася.

Задачи 2го типа

В условии приводятся несколько двойных утверждений, одно из которых истинно, а другое ложно.

Пример: Перед началом выборов эксперты высказали следующие предположения о распределении голосов:

1. Максим победит, Билл – второй
2. Билл третий, Николай – первый
3. Максим – последний, Джон – первый.

Когда выборы прошли, оказалось, что каждый эксперт был прав п одном из своих прогнозов. Как распределились места между кандидатами в зависимости от количества набранных голосов.

Решение методом преобразования логических выражений:

Введем обозначения для логических утверждений:

1. М1, Б2
2. Б3, Н1
3. М4, Д1

Каждый из экспертов прав только в одном из своих прогнозов. Тогда составим выражения для каждого из экспертов:

1. (М1 ^ ¬Б2) v (¬М1 ^ Б2)
2. (Б3 ^ ¬Н1) v (¬Б3 ^ Н1)
3. (М4 ^ ¬Д1) v (¬М4 ^ Д1)

Решим совместно полученные логические выражения:

(М1 ^ ¬Б2 v ¬М1 ^ Б2) ^ (Б3 ^ ¬Н1 v ¬Б3 ^ Н1) ^ (М4 ^ ¬Д1 v ¬М4 ^ Д1)

Перемножим первую и третью скобку, т.к. там есть совпадения как по местам, так и по имени участника, следовательно легче получить противоречие:

(М1 ^ ¬Б2 ^ М4 ^ ¬Д1) v (М1 ^ ¬Б2 ^ ¬М4 ^ Д1) v (¬М1 ^ Б2 ^ М4 ^ ¬Д1) v (¬М1 ^ Б2 ^ ¬М4 ^ Д1)

Первое слагаемое равно 0, т.к. М1 ^ М4 = 0 – Максим не может занимать одновременно и 1 и 4 место

Второе слагаемое равно 0, т.к. М1 ^ Д1 = 0 – два участника не могут одновременно занимать 1 место.

Подставим упрощенное выражение в исходное:

((¬М1 ^ Б2 ^ М4 ^ ¬Д1) v (¬М1 ^ Б2 ^ ¬М4 ^ Д1)) ^ (Б3 ^ ¬Н1 v ¬Б3 ^ Н1)

Умножаем:

(¬М1 ^ Б2 ^ М4 ^ ¬Д1 ^ Б3 ^ ¬Н1) v (¬М1 ^ Б2 ^ М4 ^ ¬Д1 ^ ¬Б3 ^ Н1) v ((¬М1 ^ Б2 ^ ¬М4 ^ Д1 ^ Б3 ^ ¬Н1) v (¬М1 ^ Б2 ^ ¬М4 ^ Д1 ^ ¬Б3 ^ Н1)

Первое и третье слагаемые равны 0, т.к. Б2 ^ Б3 = 0 – Билл не может занимать сразу 2 и 3 место.

Четвертое слагаемое равно 0, т.к. Д1 ^ Н1 = 0 – два участника не могут быть одновременно на 1 месте.

Остается только второе слагаемое:

¬М1 ^ Б2 ^ М4 ^ ¬Д1 ^ ¬Б3 ^ Н1.

Оно равно 1, только когда Б2 = 1, М4 = 1, Н1 = 1. Таким образом Николай на 1 месте, Билл на 2ом, Максим на 4ом, а значит для Джона осталось 3 место.

Решение методом рассуждений

Составим таблицу по условию задачи:

эксперт / место	1	2	3
1	Максим	Николай	Джон
2	Билл		
3		Билл	
4			Максим

Ложные утверждения будут зачеркнуты, истинные – выделены жирным.

Пусть утверждение, что Максим занял первое место истинно, тогда Максим на 4 месте – ложно, значит Джон на 1ом месте – истинно. Мы получили противоречие, т.к. согласно предположению Максим занял первое место:

эксперт / место	1	2	3
1	**Максим**	Николай	**Джон**
2	~~Билл~~		
3		Билл	
4			~~Максим~~

По условию задачи, каждый эксперт прав в одном из предположений, следовательно Билл на втором месте:

эксперт / место	1	2	3
1	~~Максим~~	**Николай**	~~Джон~~
2	**Билл**		
3		~~Билл~~	
4			**Максим**

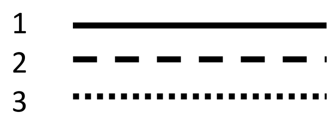
Тогда Билл не может быть на третьем месте, следовательно Николай на первом. Т.к. Николай на первом месте, Джон не может быть первым, следовательно Максим на 4 месте. Таким образом Джону досталось третье место.

При решении методом рассуждений с использованием таблиц, нужно иметь в виду, что значение ИСТИННО в одной клетке, позволяет сделать вывод, что остальные клетки в этой строке и в этом столбце имеют значение ЛОЖНО.

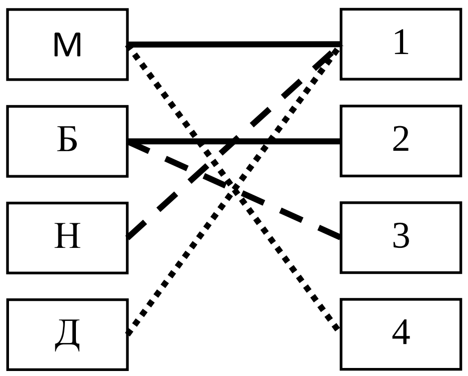
Решение с применением графа

Рассуждения можно облегчить, если нарисовать граф, наглядно показывающий связи между именами и местами.

Для каждого из экспертов введем свой тип линии в графе:

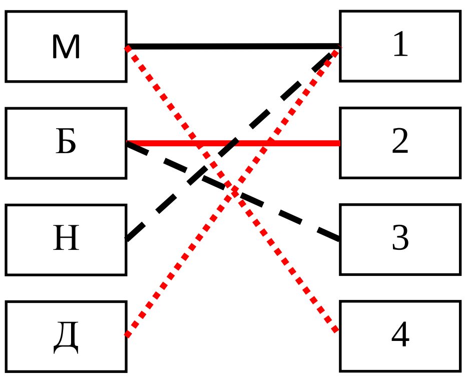


Представим условие задачи в виде графа:



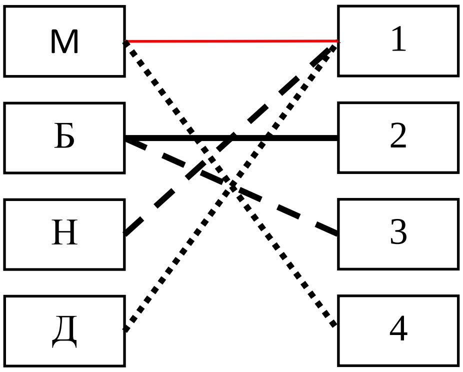
В результате решения на графе должна остаться только одна линия каждого типа и из каждой вершины должна выходить только одна линия.

Предположим, что Максим занял 1 место. Тогда начнем перерисовывать граф (красным отмечены линии, которые соответствуют ложным утверждениям и должны быть удалены):

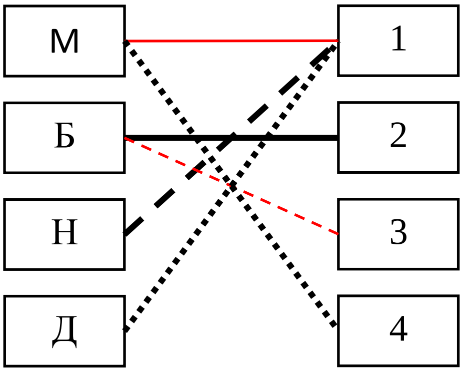


Тогда оба утверждения третьего эксперта ложны, что противоречит условию.

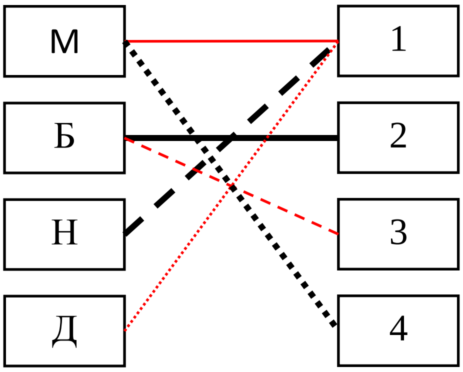
Значит, утверждение, что Максим на 1 месте ложно, а Билл на втором месте – истинно:



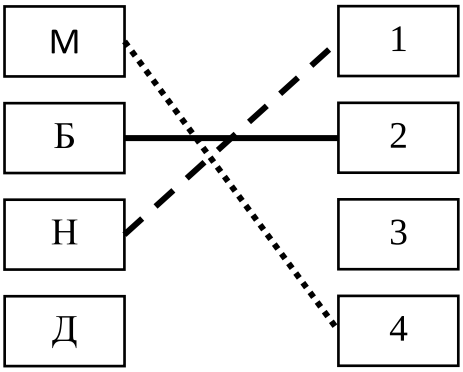
Тогда линия Б3 – ложна (т.к. Б2 – истинна), а значит у второго эксперта истинно высказывание Н1.



Тогда у третьего эксперта ложно высказывание Д1, а значит М4 истинно:



Таким образом получился граф:



А значит у Джона 3 место, т.к. это единственные вершины, из которых не выходит ни одного ребра.

Задачи 3го типа

В условии приводятся несколько (три и более) двойных утверждений, в которых одно утверждение истинно, а другое ложно.

Пример: Трое свидетелей так рассказали о машине, которую они видели:

1. Это была Хонда черного цвета.
2. Это был Форд синего цвета.
3. Это был Мерседес, но не синий.

Каждый из них был прав только в одном из своих утверждений. Какая была машина?

Решение методом преобразования логических выражений

Введем обозначения для логических утверждений:

1. Хонда – Х Черный - Ч
2. Форд – Ф Синий - С
3. Мерседес – М ¬С

Составим логическое выражение по условию задачи:

((Х ^ ¬ Ч) v (¬Х ^ Ч)) ^ ((Ф ^ ¬С) v (¬Ф ^ С)) ^ ((М ^ С) v (¬М ^ ¬С))

Перемножим второй и третий сомножители (в них есть одинаковые переменные):

((Ф ^ ¬С ^ М ^ С) v (Ф ^ ¬С ^ ¬М ^ ¬С) v (¬Ф ^ С ^ М ^ С) v (¬Ф ^ С ^ ¬М ^ ¬С) = {С ^ ¬С = 0} =

= (Ф ^ ¬С ^ ¬М ^ ¬С) v (¬Ф ^ С ^ М ^ С) = {a ^ a = a} = (Ф ^ ¬М ^ ¬С) v (¬Ф ^ М ^ С)

Умножим на первый сомножитель:

((Х ^ ¬ Ч) v (¬Х ^ Ч)) ^ ((Ф ^ ¬М ^ ¬С) v (¬Ф ^ М ^ С)) =(Х ^ ¬ Ч ^ Ф ^ ¬М ^ ¬С) v (Х ^ ¬ Ч ^ ¬Ф ^ М ^ С) v (¬Х ^ Ч ^ Ф ^ ¬М ^ ¬С) v (¬Х ^ Ч ^ ¬Ф ^ М ^ С)

Первое слагаемое равно 0, т.к. Х ^ Ф = 0

Второе слагаемое равно 0, т.к. Х ^ М = 0

Четвертое слагаемое равно 0, т.к. М ^ Ч = 0

Остается третье слагаемое:

¬Х ^ Ч ^ Ф ^ ¬М ^ ¬С = 1, когда Ч ^ Ф = 1.

Ответ: Форд черного цвета.

Решение табличным способом

Составим таблицу истинности. Т.к. переменных 5, то число строк в таблице должно быть 32, однако, машина не может быть сразу двух или трех марок, и двух цветов, поэтому рассмотрим только те строки, где значение 1 соответствует только 1 марке и 1 цвету:

					((Х ^ ¬ Ч) v (¬Х ^ Ч)) ^		((Ф ^ ¬С) v (¬Ф ^ С)) ^		((М ^ С) v (¬М ^ ¬С))		**F**
Х	Ф	М	Ч	С	Х ^ ¬ Ч	¬Х ^ Ч	Ф ^ ¬С	¬Ф ^ С	М ^ С	¬М ^ ¬С	
1	0	0	1	0	0	0					
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0			
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	0					
0	0	1	0	1	0	0					

В конечном столбце записывается результат вычисления формулы. Вычислим значения всех промежуточных конъюнкций на соответствующих наборах значений. Так как формула представляет произведение трех выражений, то если один из сомножителей равен 0, то дальше соответствующую строку можно не заполнять.

В результате мы получили 1 только для одного набора значений переменных: Ф = 1, Ч = 1.

Советы по решению логических задач

При решении логических задач можно придерживаться следующих правил:

- Выделить из условия задачи простые высказывания и обозначить их.
- Записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в сложные с помощью логических операций, или построить таблицу, помогающую боле наглядно представить условие задачи и использовать метод рассуждений.
- Попытаться упростить полученное выражение.
- Проверить соответствие полученного решения условию задачи.