Решение логических уравнений и систем логических уравнений

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ – логическая функция от n переменных. Логическое уравнение имеет вид: $F(x_1, x_2, \ldots x_n) = C$, где константа C имеет значение 1 или 0.

Логическое уравнение может иметь от 0 до 2^n различных решений. Если C равно 1, то решениями являются все те наборы переменных из таблицы истинности, на которых функция F принимает значение истина (1). Оставшиеся наборы являются решениями уравнения при C, равном нулю. Можно всегда рассматривать только уравнения вида:

$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$

Действительно, пусть задано уравнение:

$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$

В этом случае можно перейти к эквивалентному уравнению:

$\neg F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$

Рассмотрим систему из k логических уравнений:

$$\begin{cases} F1(x1, x2, \ldots xn) = 1 \\ F2(x1, x2, \ldots xn) = 1 \\ \ldots \\ Fk(x1, x2, \ldots xn) = 1 \end{cases}$$

Решением системы является набор переменных, на котором выполняются все уравнения системы. В терминах логических функций для получения решения системы логических уравнений следует найти набор, на котором истинна логическая функция Ф, представляющая конъюнкцию исходных функций F:

$Ф = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_k$

Если число переменных невелико, например, менее 5, то нетрудно построить таблицу истинности для функции Ф, что позволяет сказать, сколько решений имеет система и каковы наборы, дающие решения.

В некоторых задачах ЕГЭ по нахождению решений системы логических уравнений число переменных доходит до значения 10. Тогда построить таблицу истинности становится практически неразрешимой задачей. Для решения задачи требуется другой подход. Для произвольной системы уравнений не существует общего способа, отличного от перебора, позволяющего решать такие задачи.

В предлагаемых на экзамене задачах решение обычно основано на учете специфики системы уравнений. Однако, повторю, что кроме перебора всех вариантов набора переменных, общего способа решения задачи нет. Решение нужно строить исходя из представленной системы. Часто полезно провести предварительное упрощение системы уравнений, используя известные законы логики. Другой полезный прием решения этой задачи состоит в следующем. Нам интересны не все наборы, а только те, на которых функция Ф имеет значение 1. Вместо построения полной таблицы истинности будем строить ее аналог - бинарное дерево решений. Каждая ветвь этого дерева соответствует одному решению и задает набор, на котором функция Ф имеет значение 1. Число ветвей в дереве решений совпадает с числом решений системы уравнений.

Что такое бинарное дерево решений и как оно строится, поясню на примерах нескольких задач.

Задача 1

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют системе из двух уравнений?

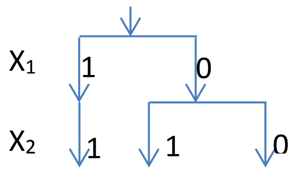
$$\begin{cases} (x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) \wedge (x4 \to x5\ ) \ = \ 1 \\ (y1 \to y2) \wedge (y2 \to y3) \wedge (y3 \to y4) \wedge (y4 \to y5\ ) \ = \ 1 \end{cases}$$

Ответ: Система имеет 36 различных решений.

Решение:

Система уравнений включает два уравнения. Найдем число решений для первого уравнения, зависящего от 5 переменных – x_1, x_2, …x_5. Первое уравнение можно в свою очередь рассматривать как систему из 5 уравнений. Как было показано, система уравнений фактически представляет конъюнкцию логических функций. Справедливо и обратное утверждение, - конъюнкцию условий можно рассматривать как систему уравнений.

Построим дерево решений для импликации (x1→ x2) - первого члена конъюнкции, который можно рассматривать как первое уравнение. Вот как выглядит графическое изображение этого дерева:



Дерево состоит из двух уровней по числу переменных уравнения. Первый уровень описывает первую переменную X_1. Две ветви этого уровня отражают возможные значения этой переменной – 1 и 0. На втором уровне ветви дерева отражают только те возможные значения переменной X_2, для которых уравнение принимает значение истина. Поскольку уравнение задает импликацию, то ветвь, на которой X_1 имеет значение 1, требует, чтобы на этой ветви X_2 имело значение 1. Ветвь, на которой X_1 имеет значение 0, порождает две ветви со значениями X_2, равными 0 и 1. Построенное дерево задает три решения, на которых импликация $X_1 \to X_2$ принимает значение 1. На каждой ветви выписан соответствующий набор значений переменных, дающий решение уравнения.

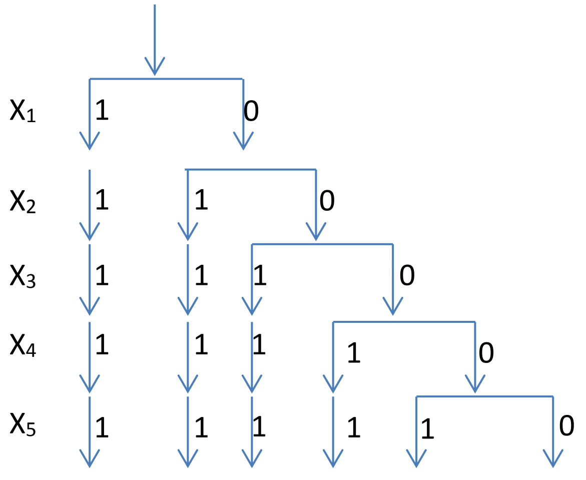
Вот эти наборы: {(1, 1), (0, 1), (0, 0)}

Продолжим построение дерева решений, добавляя следующее уравнение, следующую импликацию $X_2 \to X_3$. Специфика нашей системы уравнений в том, что каждое новое уравнение системы использует одну переменную из предыдущего уравнения, добавляя одну новую переменную. Поскольку переменная X_2 уже имеет значения на дереве, то на всех ветвях, где переменная X_2 имеет значение 1, переменная X_3 также будет иметь значение 1. Для таких ветвей построение дерева продолжается на следующий уровень, но новые ветви не появляются. Единственная ветвь, где переменная X_2 имеет значение 0, даст разветвление на две ветви, где переменная X_3 получит значения 0 и 1. Таким образом, каждое добавление нового уравнения, учитывая его специфику, добавляет одно решение.

Исходное первое уравнение:

(x1→x2) /\ (x2→x3) /\ (x3→x4) /\ (x4→x5) = 1

имеет 6 решений. Вот как выглядит полное дерево решений для этого уравнения:



Второе уравнение нашей системы аналогично первому:

(y1→y2) /\ (y2→y3) /\ (y3→y4) /\ (y4→y5) = 1

Разница лишь в том, что в уравнении используются переменные Y. Это уравнение также имеет 6 решений. Поскольку каждое решение для переменных X_i может быть скомбинировано с каждым решением для переменных Y_j, то общее число решений равно 36.

Заметьте, построенное дерево решений дает не только число решений (по числу ветвей), но и сами решения, выписанные на каждой ветви дерева.

Задача 2

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) \wedge (x4 \to x5\,) = 1 \\ (y1 \to y2) \wedge (y2 \to y3) \wedge (y3 \to y4) \wedge (y4 \to y5\,) = 1 \\ (x1 \to y1) = 1 \end{cases}$$

Ответ: 31

Решение:

Эта задача является модификацией предыдущей задачи. Разница в том, что добавляется еще одно уравнение, связывающее переменные X и Y.

Из уравнения $X_1 \to Y_1$ следует, что когда X_1 имеет значение 1 (одно такое решение существует), то и Y_1 имеет значение 1. Таким образом, существует один набор, на котором

X_1 и Y_1 имеют значения 1. При X_1, равном 0, Y_1 может иметь любое значение, как 0, так и 1. Поэтому каждому набору с X_1, равном 0, а таких наборов 5, соответствует все 6 наборов с переменными Y. Следовательно, общее число решений равно 31.

Задача 3

Сколько решений имеет уравнение:

$(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_3 \vee X_4) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_5 \vee X_1) = 1$

Ответ: 2

Решение:

Вспоминания основные эквивалентности, запишем наше уравнение в виде:

$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_5) \wedge (X_5 \rightarrow X_1) = 1$

Циклическая цепочка импликаций означает тождественность переменных, так что наше уравнение эквивалентно уравнению:

$X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \equiv X_4 \equiv X_5 = 1$

Это уравнение имеет два решения, когда все X_i равны либо 1, либо 0.

Задача 4

Сколько решений имеет уравнение:

$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_2) \wedge (X_4 \rightarrow X_5) = 1$

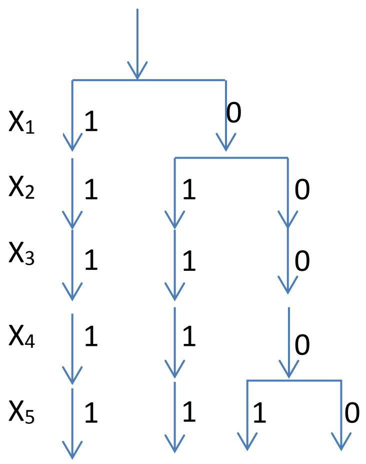
Ответ: 4

Решение:

Так же, как и в задаче 20, от циклических импликаций перейдем к тождествам, переписав уравнение в виде:

$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \equiv X_3 \equiv X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_5) = 1$

Построим дерево решений для этого уравнения:



Задача 4

Сколько решений имеет следующая система уравнений?

$$\begin{cases} ((X1 \equiv X2) \wedge (X3 \equiv X4)) \vee (\neg(X1 \equiv X2) \wedge \neg(X3 \equiv X4)) = 0 \\ ((X3 \equiv X4) \wedge (X5 \equiv X6)) \vee (\neg(X3 \equiv X4) \wedge \neg(X5 \equiv X6)) = 0 \\ \big((X5 \equiv X6) \wedge (X7 \equiv X8)\big) \vee \big(\neg(X5 \equiv X6) \wedge \neg(X7 \equiv X8)\big) = 0 \\ ((X7 \equiv X8) \wedge (X9 \equiv X10)) \vee (\neg(X7 \equiv X8) \wedge \neg(X9 \equiv X10)) = 0 \end{cases}$$

Ответ: 64

Решение:

Перейдем от 10 переменных к 5 переменным, введя следующую замену переменных:

$Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$; $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$; $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$; $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$; $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$;

Тогда первое уравнение примет вид:

$(Y_1 \wedge Y_2) \vee (\neg Y_1 \wedge \neg Y_2) = 0$

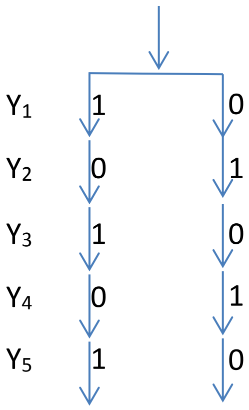
Уравнение можно упростить, записав его в виде:

$(Y_1 \equiv Y_2) = 0$

Переходя к традиционной форме, запишем систему после упрощений в виде:

$$\begin{cases} \neg(Y1 \equiv Y2) = 1 \\ \neg(Y2 \equiv Y3) = 1 \\ \neg(Y3 \equiv Y4) = 1 \\ \neg(Y4 \equiv Y5) = 1 \end{cases}$$

Дерево решений для этой системы простое и состоит из двух ветвей с чередующимися значениями переменных:



Возвращаясь к исходным переменным X, заметим, что каждому значению переменной Y соответствует 2 значения переменных X, поэтому каждое решение в переменных Yпорождает 2^5 решений в переменных X. Две ветви порождают $2 * 2^5$ решений, так что общее число решений равно 64.

Как видите, каждая задача на решение системы уравнений требует своего подхода. Общим приемом является выполнение эквивалентных преобразований для упрощения уравнений.

Общим приемом является и построение деревьев решений. Применяемый подход частично напоминает построение таблицы истинности с той особенностью, что строятся не все наборы возможных значений переменных, а лишь те, на которых функция принимает значение 1 (истина). Часто в предлагаемых задачах нет необходимости в построении полного дерева решений, поскольку уже на начальном этапе удается установить закономерность появления новых ветвей на каждом следующем уровне, как это сделано, например, в задаче 1.