Уравнение плоскости в пространстве.
в декартовой системе координат

1) общий вид уравнения плоскости $ax+by+cz+d=0$
примечание: у одной плоскости может быть бесконечно много уравнений. Например, уравнения $ax+by+cz+d=0$ и $3ax+3by+3cz+3d=0$ задают одну плоскость.

2) вектор $\vec{v}\{a;b;c\}$ перпендикулярен плоскости $ax+by+cz+d=0$ и называется вектором *нормали* к плоскости.
примечание: у одной плоскости может быть бесконечно много перпендикулярных векторов. Например, вектор $\overrightarrow{v_1}\{-2a;-2b;-2c\}$ перпендикулярен плоскости $ax+by+cz+d=0$

3) Уравнение плоскости проходящей через точку $T\left(x_0;y_0;z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{c}\{q;r;s\}$ имеет вид
$qx+ry+sz+d=0$,
где значение коэффициента d можно найти, подставив Координаты точки T в уравнение плоскости $qx_0+ry_0+sz_0+d=0$

4) Для нахождения уравнения плоскости, проходящей через

три данные точки $T_1;T_{2;}T_3$ надо составить систему из трех

уравнений, отражающих то, что данные точки подходят

под искомое уравнение. Уравнений получится три;

неизвестных коэффициентов – четыре. Для упрощения

системы можно принять один из коэффициентов равным 1.

5) Чтобы найти угол между плоскостью $\alpha: ax+by+cz+d=0$ и вектором $\vec{c}\{q;r;s\}$ надо:
А) Найти угол между вектором $\vec{c}\{q;r;s\}$ и вектором $\vec{v}\{a;b;c\}$ - *нормалью* к плоскости α.
Б) Искомый угол между α и $\vec{c}\{q;r;s\}$ равен $(\frac{\pi}{2}-\vec{c}\,\hat{}\,\vec{v})$.

Примечание: если косинус угла $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{v}$ получился отрицательный, т.е. угол $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{v}$ - тупой, то искомым углом будет угол $(\vec{c}\,\hat{}\,\vec{v}-\frac{\pi}{2})$

6) Чтобы найти угол между плоскостью $\alpha_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и плоскостью $\alpha_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ надо найти угол между *нормалями*, т.е. векторами $\overrightarrow{v_1}\{a_1;b_1;c_1\}$ и $\overrightarrow{v_2}\{a_2;b_2;c_2\}$
Примечание: если косинус угла $\overrightarrow{v_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{v_2}$ получился отрицательный,

т.е. угол $\overrightarrow{v_1}\hat{\ }\overrightarrow{v_2}$ тупой, то искомым углом будет угол $\pi-\overrightarrow{v_1}\hat{\ }\overrightarrow{v_2}$

7) Расстояние от точки T(x_T;y_T;z_T) до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(T;\alpha)=\frac{|ax_T+by_T+cz_T+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8) А) две плоскости $\alpha_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $\alpha_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ совпадают, если **все** коэффициенты в их уравнениях пропорциональны, т.е. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$. Если какой-то из коэффициентов равен нулю, то этот коэффициент равен нулю и в уравнении равной плоскости.

Б) две плоскости $\alpha_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $\alpha_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ параллельны, если коэффициенты при x,y и z в их уравнениях пропорциональны, т.е. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, но частное от деления свободных членов – другое: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$.

Если какой-то из коэффициентов $a_1;b_1;c_1$ равен нулю, то соответствующий коэффициент равен нулю и в уравнении параллельной плоскости. Условие $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ означает, что *нормали* к плоскостям коллинеарны.

Дополнение: для нахождения угла между векторами надо воспользоваться формулой:

$$\cos\overrightarrow{v_1}\hat{\ }\overrightarrow{v_2}=\frac{\overrightarrow{v_1}\bullet\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}|\bullet|\overrightarrow{v_2}|}$$ или в координатах:

$$\cos\{x_1;y_1;z_1\}\hat{\ }\{x_2;y_2;z_2\}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$