Решение иррациональных уравнений

Теория: Основным приемом при решении иррациональных уравнений является возведение в квадрат правой и левой части уравнения.

$$f(x)=g(x) \quad (1)$$

$$f^2(x)=g^2(x) \quad (2)$$

При таком преобразовании могут появляться посторонние корни. Уравнение (2) является следствием уравнения (1). Причины появления посторонних корней две.
Первая причина появления посторонних корней: При возведении в квадрат может расширяться Область Допустимых Значений (ОДЗ) уравнения.
Вторая причина появления посторонних корней: Уравнение (2) допускает также случай $f(x)=-g(x)$, который не дает решения уравнения (1)
Вывод: к решению уравнения (1) возможны два подхода

1) Решить уравнение-следствие (2) и подставить найденные корни для проверки в уравнение (1)
2) Если выполнение проверки вызывает трудности, то приходится выписывать набор условий, обеспечивающих равносильность перехода от уравнения (1) к уравнению (2).

Рассмотрим схемы равносильных условий для некоторых типов иррациональных уравнений.

Для простоты будем считать, что $D(f)=D(g)=R$

Внимание! Во многих схемах ОДЗ выписано не полностью. Некоторые условия не выписаны т.к. они избыточны, т.е. следуют из выписанных условий системы.

Схема 1

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \\ g(x)=0 \end{array}\right.$$

Схема 2

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) & - \quad \textit{уравнение}-\textit{следствие} \\ f(x)\geq 0 & - \quad \textit{ОДЗ} \end{cases}$$

Схема 3

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) & - \quad \textit{уравнение}-\textit{следствие} \\ g(x)\geq 0 & - \quad \textit{условие возведения в квадрат}\ (\textit{УВК}) \end{cases}$$

Схема 4

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{\varphi(x)}=g(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)}=g^2(x)-f(x)-\varphi(x) & - \quad \text{уравнение} - \text{следствие}\\ g(x)\ge 0 \quad - \quad \text{условие возведения в квадрат } (\text{УВК})\\ f(x)\ge 0 \quad \varphi(x)\ge 0 \quad - \quad \text{ОДЗ}\end{cases}$$

Для дальнейшего решения пригодится схема 3

Решение иррациональных неравенств.

Теория: При возведении в квадрат правой и левой части неравенства могут не только появляться посторонние корни. Такое преобразование может приводить к потере корней неравенства. Например, неравенство $-5<-3$ верно при всех x, а неравенство $(-5)^2<(-3)^2$ имеет пустое множество решений. Поэтому, при решении неравенств **необходимо** выписывать равносильные условия.

Рассмотрим схемы равносильных условий для некоторых типов иррациональных неравенств.

Для простоты будем считать, что $D(f)=D(g)=R$

Схема 1

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)>0\end{cases}\\ g(x)=0\end{array}\right.$$

Схема 2

$$\sqrt{f(x)}\ge\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge g(x) \quad - \quad \text{неравенство} - \text{следствие}\\ g(x)\ge 0 \quad - \quad \text{ОДЗ}\end{cases}$$

Схема 3

$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>g^2(x)\\ g(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Схема 4

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим реализацию этих схем на конкретных примерах

Некоторые примеры решения иррациональных уравнений

Схема 1

$$\left(x^2 - 2x - 3\right)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;3\}$

Схема 2

$$\sqrt{x^2 - 5x - 6} = \sqrt{-x^2 - x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = -x^2 - x \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{-1\}$

Схема 3

$$\sqrt{2x+5}=9-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=(9-3x)^2 & - \quad \textit{уравнение} - \textit{следствие} \\ 9-3x \ge 0 & - \quad \textit{условие возведения в квадрат}\ (\textit{УВК}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{38}{9} \\ x=2 \end{array} \right. \\ 9-3x \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{2\}$

Данные уравнения можно решать и переходом к уравнеиям-следствиям с проверкой в конце.

Некоторые примеры решения иррациональных неравенств

Схема 1

$$\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-3 \ge 0 \\ x>0 \end{cases} \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty) \\ x>0 \end{cases} \\ x=0 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{0\} \cup [3;+\infty)$

Схема 2

$$\sqrt{x^2-5x-6} \ge \sqrt{-x^2-x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5x-6 \ge -x^2-x \\ -x^2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty) \\ x \in [-1;0] \end{cases}$$

Ответ: $\{-1\}$

Схема 3

$$\sqrt{2x+5} \ge 9-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+5 \ge (9-3x)^2 \\ 9-3x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ 9-3x \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left[2; \dfrac{38}{9}\right] \\ x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -2,5 \\ x \ge 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[2; +\infty\right)$

Схема 4

$$\sqrt{2x+5} \le 9-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \le (9-3x)^2 \\ 9-3x \ge 0 \\ 2x+5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; 2\right] \cup \left[\dfrac{38}{9}; +\infty\right) \\ x \le 3 \\ x \ge -2,5 \end{cases}$$

Ответ: $\left[-2,5\,;\,2\right]$