

Карточка № 44. Куб суммы и разности. Сумма и разность кубов

1. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(-m + n)^3$; в) $(-x - y)^3$;
 б) $(-2 + k)^3$; г) $(-0,5 + p)^3$.

2. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2m - 3n)^3$; в) $(3x + y^2)^3$; д) $-(2c - k^3)^3$;
 б) $(5a + 2b)^3$; г) $(p^2 - 2k)^3$; е) $-(m^3 + 3p)^3$.

3. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $(4p + k)^3$; в) $(2x - 3y)^3$; д) $\left(\frac{1}{2}m - n^2\right)^3$;
 б) $(3m - k)^3$; г) $(4x + 3y)^3$; е) $\left(m^2 + \frac{1}{3}n\right)^3$.

4. Упростите выражение:

а) $(x + y)^3 + (x - y)^3$; в) $(m - n)^3 + 3mn(m - n)$;
 б) $(x + y)^3 - (x - y)^3$; г) $3mn(m + n) - (m + n)^3$.

5. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(p + q)^3 - p(p - q)^2$;
 б) $3y(x + y)^2 + (x - y)^3$;
 в) $(m - n)^3 - (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
 г) $(m + n)(m^2 - mn + n^2) - (m + n)^3$.

6. Упростите:

а) $(2x + y)^3 - 6xy(2x + y)$;
 б) $27y^2(x - y) - (x - 3y)^3$;
 в) $(3a - b)^3 - 3a(3a - b)^2$;
 г) $3b(a + 3b)^2 - (a + 3b)^3$.

7. Докажите тождество:

а) $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$;
 б) $3xy(y - x) = (x - y)^3 - x^3 + y^3$.

8. Найдите значение выражения:

а) $x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ при $x = -18$ и $y = -28$;
 б) $3xy(x + y) + x^3 + y^3$ при $x = -33$ и $y = 23$.

9. При каких значениях верно равенство:

а) $(x - y)^3 = (y - x)^3$;
 б) $(x - y)^3 = x^3 - y^3$;
 в) $(x - y)^2 = (y - x)^2$?

10. Решите уравнение:

а) $(2x + 1)^3 = 4x^2(2x + 3)$; б) $27x^2(1 - x) = (1 - 3x)^3$.

11. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $(9a^2 + 3a + 1)(3a - 1)$, если $a = \frac{1}{3}$;
 2) $(5y - 2)(25y^2 + 10y + 4) + 8$, если $y = -\frac{1}{5}$.

12. Найдите значение выражения:

1) $(1 - b^2)(1 + b^2 + b^4)$, если $b = -2$;
 2) $2x^3 + 7 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$, если $x = -1$.

13. Разложите на множители:

1) $(a + 6)^3 - 27$; 3) $8a^6 - (4a - 3)^3$; 5) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;
 2) $(2x - 1)^3 + 64$; 4) $1000 + (y - 10)^3$; 6) $(a - 2)^3 + (a + 2)^3$.

14. Представьте в виде произведения:

1) $(a + 6)^3 - 27$; 3) $8a^6 - (4a - 3)^3$; 5) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;
 2) $(2x - 1)^3 + 64$; 4) $1000 + (y - 10)^3$; 6) $(a - 2)^3 + (a + 2)^3$.

15. Упростите выражение:

1) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (2 - x)(4 + 2x + x^2)$;
 2) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) - x(x - 5)(x + 5)$;
 3) $a(a - 3)^2 - (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
 4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + 1)(a^{12} + 1)$.

16. Подставьте вместо звёздочек выражения:

1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;
 2) $(* + *) (25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;
 3) $(mn + *) (* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

17. Решите уравнение:

- 1) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - 9x(3x^2 - 4) = 17$;
- 2) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 7)(x + 7) = 15$;
- 3) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) - x(x - 9)^2 = 4x(4,5x - 13,5)$.

18. Решите уравнение:

- 1) $(7 - 2x)(49 + 14x + 4x^2) + 2x(2x - 5)(2x + 5) = 43$;
- 2) $100(0,2x + 1)(0,04x^2 - 0,2x + 1) = 5x(0,16x^2 - 4)$.

19. Докажите, что значение выражения:

- 1) $456^3 - 156^3$ делится нацело на 300;
- 2) $254^3 + 238^3$ делится нацело на 123;
- 3) $17^6 - 1$ делится нацело на 36.

20. Докажите, что значение выражения:

- 1) $341^3 + 109^3$ делится нацело на 90;
- 2) $2^{15} + 3^3$ делится нацело на 35.

21.

Укажите наименьшее натуральное значение n такое, чтобы выражение $x^{2n} - y^{3n}$ можно было разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите полученный многочлен на множители по этим формулам.

22.

Придумайте многочлен, который можно разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите придуманный многочлен на множители по этим формулам.

23.

Можно ли утверждать, что если сумма двух натуральных чисел делится нацело на некоторое натуральное число, то на это число делится нацело:

- 1) разность их квадратов;
- 2) сумма их квадратов;
- 3) сумма их кубов?

24.

Докажите, что сумма кубов двух последовательных нечётных натуральных чисел делится нацело на 4.

25.

Докажите, что сумма кубов двух последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 3, делится нацело на 9.

26.

Известно, что числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 = 1$. Найдите значение выражения $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

27.

Известно, что числа x и y таковы, что $x^3 - y^2 = 2$. Найдите значение выражения $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$.

28.

Докажите, что если $2a - b = 1$, то $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.

29.

Докажите, что если $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

30.

В одном ящике было на 12 кг яблок больше, чем в другом. Когда из первого ящика переложили во второй 4 кг яблок, то оказалось, что количество яблок во втором ящике составило $\frac{5}{7}$ количества яблок в первом. Сколько килограммов яблок было в каждом ящике сначала?

31.

Какая последняя цифра значения выражения $3^{16} + 7^{16}$?

32.

Найдите значение каждого из следующих выражений при $a = 1$ и $a = -1$:

- 1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{99} + a^{100}$;
- 2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{98} + a^{99}$;
- 3) $aa^2a^3a^4 \dots a^{99}a^{100}$;
- 4) $aa^2a^3a^4 \dots a^{98}a^{99}$.